1、等价无穷小的使用：

一般被替换的量是作为被乘或被除元素时可以用等价无穷小替换。

例.1.4.4(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}$ 不能转换为 $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\sin x}$

从而得出 1 的答案

2. $\tan x \sim x$，是在 $x\to 0$ 时才互为等价无穷小

故 1.4.4.(9)

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x} \neq \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$ 这是不对的

3. $\sec x$ 与 $\sec 3x$ 在 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时的极限并不互为等价无穷小

1.4.4.(9)

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}\neq\frac{1}{3}$

而应该为 $=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}=\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin 3x}{-\sin x}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=9\cdot\frac{1}{3}=3$

1.4.1(1) 研究给定函数在指定区间上的单调性

(1) $y=16x^2(x-1)^2$ 在 $(0,1)$ 内；

解：$y=16x^2(x-1)^2$ 在 $(0,1)$ 上可导，$y=16x^4-32x^3+16x^2$

对y求导，$y'=16\cdot4\cdot x^3-32\cdot3\cdot x^2+16\cdot2\cdot x$

$=64x^3-96x^2+32x$

$=32x(2x-1)(x-1)$

$x\in(0,1)$　$x>0$，$x-1<0$　$2x-1$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上小于0，在 $(\frac{1}{2},1)$ 上大于0

故 y' 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上大于0，在 $(\frac{1}{2},1)$ 上小于0

y 在 $(0,\frac{1}{2}]$ 上递增，在 $[\frac{1}{2},1)$ 上递减

1.4.2(1) 求下列给定函数的单调区间与极值

(1) $y=(x-1)^2(x+3)^3$

(求导时注意定义域)

解：$x\in R$　$y'=2(x-1)(x+3)^3+3(x+3)^2(x-1)^2$

$=(x-1)(x+3)^2\cdot(2(x+3)+3(x-1))$

$=(x-1)(x+3)^2(5x+3)$

令 $y'=0 \Rightarrow x=1, x=-3, x=-\frac{3}{5}$ 这三点为驻点

令 $y'>0 \Rightarrow x>1$ 或 $x<-\frac{3}{5}$

故 y 在 $(-\infty,-\frac{3}{5})$ 递增，在 $(-\frac{3}{5},1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增

故 $x=1$ 为极小值点，$x=-\frac{3}{5}$ 为极大值点，$x=-3$ 不是极值点

y 的单调增区间：$(-\infty,-\frac{3}{5}]$，$[1,+\infty)$

单调减区间：$[-\frac{3}{5},1]$

极大值 $y(-\frac{3}{5})=(-\frac{3}{5}-1)^2(-\frac{3}{5}+3)^3=\frac{110592}{3125}$

极小值 $y(1)=0$

(5) $y=\frac{\ln^2 x}{x}$

解：定义域：~~$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$~~ $x>0$

$$y'=\frac{x\cdot\frac{1}{x}\cdot 2\ln x-1\cdot\ln^2 x}{x^2}$$

$$=\frac{\ln x\cdot(2-\ln x)}{x^2}$$

令$y'=0\Rightarrow x=1$或$x=e^2$

令$y'>0\Rightarrow x\in(1,e^2)$

故 y的单调递增区间：$[1,e^2]$

单调递减区间：$(0,1)$，$(e^2,+\infty)$

$y=1$是极小值点 $y(1)=0$ 是极小值

$y=e^2$是极大值点 $y(e^2)=4e^{-2}$是极大值

(8) $y=\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

解：定义域：$x\in R$

$$y'=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}=\frac{1-x}{1+x^2}$$

令$y'=0\Rightarrow x=1$

令$y'>0\Rightarrow x<1$

故y在$(-\infty,1)$上递增

y的单调递增区间为$(-\infty,1]$

单调递减区间为$[1,+\infty)$

$x=1$为极大值点 无极小值点

极大值为$y(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$ 无极大值.

(10) $y=2e^{x}+e^{-x}$

解: 定义域: $x\in R$

$y'=2e^{x}-e^{-x}$ $y''=2e^{x}+e^{-x}>0$ 恒成立

故 y' 在R上递增 易知 $y'|_{x=-\frac{1}{2}\ln 2}=0$

故 $x<-\frac{1}{2}\ln 2$ 时, y递减, 在 $x>-\frac{1}{2}\ln 2$ 时, y递增

y的单调递增区间为: $[-\frac{1}{2}\ln 2,+\infty)$

单调递减区间为: $(-\infty,-\frac{1}{2}\ln 2)$

$x=-\frac{1}{2}\ln 2$ 为极小值点.

极小值 $y(-\frac{1}{2}\ln 2)=2\sqrt{2}$, 无极大值.

1.4.3 求下列给定函数在指定区间上的最值。

(1) $f(x)=\sqrt[3]{2x^2(x-6)}$ $x\in[-2,4]$

解: 对f(x)求导比较麻烦, 注意到 $2x^2(x-6)$ 始终为负, 而对 $2x^2(x-6)$ 求立方根不影响 $2x^2(x-6)$ 的单调性.

故f(x)的最值为 $2x^2(x-6)$ 的最值开立方根

设 $g(x)=2x^2(x-6)$ $g'(x)=6x^2-24x=6x(x-4)$

令 $g'(x)>0 \Rightarrow x\in[-2,0]$ 故g(x)在[-2,0]上递增,

在[0,4]递减 $g(x)_{max}=g(0)=0$

$g(-2)=-64$ $g(4)=-64$ 故 $g(x)_{min}=g(-2)=g(4)=-64$

故 $f(x)_{min}=f(-2)=f(4)=-4$

$f(x)_{max}=f(0)=0$

(3) $y=|x^2-3x+2|$， $x\in[-10,10]$

解：$y=|x^2-3x+2|=|(x-2)(x-1)|$

$$=\begin{cases}(x-2)(x-1) & x>2 \text{或} x<1\\ -(x-2)(x-1) & x\in[1,2]\end{cases}$$

$y\geq 0$ 恒成立　故 $y_{min}=0=y(1)=y(2)$

$x>2$或$x<1$时，$y'=2x-3$，故y在$[-10,1)$时递减，在$(2,10]$上递增

$x\in[1,2]$时，$y'=3-2x$ 故y在$[1,\frac{3}{2})$上递增，在$[\frac{3}{2},2)$上递减

故y_{max}在$y_{x=-10}$，$y_{x=10}$，$y_{x=\frac{3}{2}}$上取出

$y_{x=-10}=132$　$y_{x=10}=72$　$y_{x=\frac{3}{2}}=\frac{1}{4}$

故$y_{max}=132$

(10) $y=\sqrt{x^3}-x$　$x\in[0,2]$

解：$y=x^{\frac{3}{2}}-x$

$y'=\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}-1$　$x\in[0,2]$

令$y'>0 \Rightarrow x>\frac{4}{9}$

故y在$[0,\frac{4}{9})$上递减，在$[\frac{4}{9},2]$上递增

故 $y_{min}=y(\frac{4}{9})=-\frac{4}{27}$　$y(0)=0$　$y(2)=2\sqrt{2}-2$

故$y_{max}=y(2)=2\sqrt{2}-2$.

1.4.4. 求下列极限

(2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\ \overset{\text{洛必达}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\ \lim_{x\to1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}\ \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{洛必达}}{=}}\ \lim_{x\to1}\frac{\ln x+1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{洛必达}}{=}}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2x}-\cos x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3x}{\cos^2x-\cos^3x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3x}{1-\cos x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{洛必达}}{=}}\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot3\cos^2x}{\sin x}=3$$

(4) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\ln\sin x}$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{洛必达}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\cos x\cdot\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\sin4x}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{洛必达}}{=}}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{4\cdot\cos4x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4\cos^2x\cos4x}=\frac{1}{4\cdot(\frac{\sqrt2}{2})^2\cdot(-1)}=-\frac{1}{2}$$

(9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan3x}$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{洛必达}}{=}}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{3\cdot\frac{1}{\cos^23x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^23x}{3\cos^2x}=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos3x}{\cos x}\right)^2$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{洛必达}}{=}}\frac{1}{3}\cdot\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cdot(-\sin3x)}{-\sin x}\right)^2\ \overset{\text{等价无穷小}}{\underset{\cancel{\sin x\sim x}}{=}}\ \frac{1}{3}\cdot\cancel{\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cdot3x}{x}\right)}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3\cdot1}{1}\right)^2=3.$$

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{洛必达}{=\!=}} \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3\sin^2 x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}\cos x}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sin^2 x} \overset{洛必达}{=\!=} \frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}}{2\sin x\cos x}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2\sin x} = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}$$

(16) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)$ $(a>0$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} \overset{洛必达}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\ln a\cdot a^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\ln a\cdot a^{\frac{1}{x}} = \ln a.$$

1.4.5. 设有一块边长为a的正方形铁皮，从四个角截去同样的小方形，使其做成一个无盖的方盒子，问小方形边长多少时才能使盒子容积最大？

解：设小方形边长为 x，$0<2x<a \Rightarrow x\in(0,\frac{a}{2})$

设方盒子容积为$f(x)$　$f(x)=x\cdot(a-2x)^2$

求最大值.

$f'(x)=(a-2x)^2-4x(a-2x)=(a-2x)(a-6x)$

令$f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{a}{2}$（舍去）或 $x=\frac{a}{6}$

令$f'(x)>0 \Rightarrow x\in(0,\frac{a}{6})$　故$f(x)$在$(0,\frac{a}{6})$上递增，在$(\frac{a}{6},\frac{a}{2})$上递减

$f(x)_{max}=f(\frac{a}{6})=\frac{a}{6}\cdot(a-2\cdot\frac{a}{6})^2=\frac{2}{27}a^3$

故小方形边长$\frac{a}{6}$时盒子取得最大容积$\frac{2}{27}a^3$

1.4.7 设函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内有二阶连续导数，且 $xf''(x)-f'(x)>0$，研究 $\frac{f'(x)}{x}$ 在 $(0,a)$ 内的单调性.

解：设 $g(x)=\frac{f'(x)}{x}$ $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内有二阶连续导数 $x\in(0,a)$

故 $g'(x)=\frac{f''(x)x-f'(x)}{x^2}$ 而已知 $xf''(x)-f'(x)>0$

故 $g'(x)>0$ 在 $(0,a)$ 内恒成立

故 $g(x)$ 在 $(0,a)$ 内单调递增.

故 $\frac{f'(x)}{x}$ 在 $(0,a)$ 内递增.